FUNKTIONENTHEORIE I
WS 04/05
Ö. Imamoḡlu

Serie 10

Abgabe: 21. Januar 2005

1. Sei G ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf G mit $f(z) \neq 0$ für alle $z \in G$.

   Zeigen Sie, dass es eine holomorphe Funktion $g : G \to \mathbb{C}$ gibt mit

   $$f(z) = \exp(g(z))$$

   für alle $z \in G$.

2. (a) Sei f eine holomorphe Funktion in einem Gebiet G. Sei $B = B(a, R)$ eine Kreisscheibe um $a \in G$ mit $\overline{B} \subset G$, und zudem gelte

   $$\min_{z \in \partial B} |f(z)| > |f(a)|.$$

   Zeigen Sie, dass f dann eine Nullstelle in B hat.

   (b) Zeigen Sie mit Teil (a) den Satz von der offenen Abbildung. Dieser besagt, dass eine holomorphe Abbildung f in einem Gebiet G, welche nirgends lokal konstant ist, eine offene Abbildung ist, das heisst, dass das Bild einer jeden offenen Teilmenge wieder offen ist.

3. Untersuchen Sie die isolierten Singularitäten der folgenden Funktionen, das heisst: Ist die Singularität hebbar, dann heben Sie diese, ist sie ein Pol, bestimmen Sie den Hauptteil, ist sie wesentlich, so bestimmen Sie für alle genügend kleinen $\epsilon > 0$ das Bild von $\{z \in \mathbb{C} : \ 0 < |z| < \epsilon\}$ unter der Funktion.

   - $f_1(z) = \dfrac{1}{e^z - 1}$,
   - $f_2(z) = e^{1/z}$,
   - $f_3(z) = \cos \dfrac{1}{z}$,
   - $f_4(z) = \dfrac{\sin z}{z}$.