Serie 12

<u>Ferienpräsenz</u>
12:00 bis 13:00 im HG E 18.1 an folgenden Tagen:
Fr 16.7., Di 20.7., Fr 30.7., Di 10.8., Fr 20.8., Di 24.8., Fr 27.8., Di 31.8., Fr 3.9., Di 7.9.

1. Bestimme die quellenfreien Zentralfelder in der Ebene ($= \mathbb{R}^2$) und im Raum ($= \mathbb{R}^3$). Es soll also gelten

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \kappa(r)\frac{\mathbf{x}}{r} \quad (r := |\mathbf{x}| \neq 0), \qquad \operatorname{div}\mathbf{v} \equiv 0.$$

2. Es sei $\mathbf{v}$ ein (kugelsymmetrisches) Zentralfeld im $\mathbb{R}^3$ mit Zentrum im Punkt $(0, 0, -1)$, dessen Feldstärke mit der dritten Potenz des Abstandes vom Zentrum abnehme, und es sei $\mathbf{v}(0, 0, 0) = (0, 0, 1)$. Berechne den Fluss von $\mathbf{v}$ von unten nach oben durch die (x, y)-Ebene.

3. Berechne den Fluss des Vektorfeldes

$$\mathbf{v}(x, y, z) := (2y^2 - z^2, x^2 - y^2 + 2z^2, 1 + x^2z^2)$$

in Richtung der positiven y-Achse durch das Quadrat mit den Eckpunkten $(\pm 1, 0, \pm 1)$.

4. Es sei S eine orientierte Hyperfläche im Definitionsbereich des Funktion $f : \mathbb{R}^n \curvearrowright \mathbb{R}$. Dann bezeichnet man die in den Punkten von S definierte Grösse

$$\frac{\partial f}{\partial n} := \nabla f \cdot \mathbf{n}$$

als **Normalenableitung** von f.

a) Beweise die beiden folgenden **Greenschen Identitäten**, die in der Potentialtheorie und der Elektrodynamik gebraucht werden: Für einen beliebigen zulässigen Bereich $B \subset \mathbb{R}^3$ und beliebige C^2-Funktionen f und g gilt

$$\int_B (f\Delta g - g\Delta f)\, d\mu = \int_{\partial B} \left(f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n} \right) d\omega. \tag{1}$$

Bitte wenden!

(*Hinweis:* Betrachte das Feld $\mathbf{v} := f\nabla g - g\nabla f$) und

$$\int_B (f\Delta g + \nabla f \cdot \nabla g)\, d\mu = \int_{\partial B} f \frac{\partial g}{\partial n}\, d\omega. \tag{2}$$

b) Ist f eine harmonische Funktion auf B und $f(\mathbf{x}) \equiv 0$ auf ∂B, so ist $f(\mathbf{x}) \equiv 0$ auf ganz B. *Hinweis:* Benütze (2) mit $f = g$.

5. Man berechne das Linienintegral $\int_\gamma \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x}$ für das Vektorfeld

$$\mathbf{K}(x, y, z) := (x - y + z, y - z + x, z - x + y)$$

und den Zyklus γ aus der Abbildung 1 auf drei Arten:

a) direkt,

b) mit Hilfe des Satzes von Stokes und einer geeigneten Parameterdarstellung der Dreiecksfläche,

c) mit Hilfe des Satzes von Stokes und geometrischer Einsicht, die erlaubt, das Flächenintegral "im Kopf" auszuwerten.
Hinweis: Benutze die Symmetrie des Problems bezüglich zyklischer Vertauschungen $x \rightsquigarrow y \rightsquigarrow z \rightsquigarrow x$.

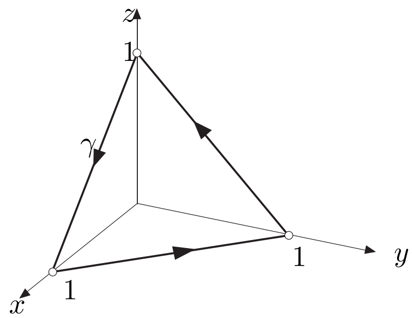

Abbildung 1: Der Zyklus γ aus Aufgabe 5.

6. Lege die Parameter $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ so fest, dass das Feld

$$\mathbf{K}(x, y, z) := (x + 2y + \alpha z, \beta x - 3y - z, 4x + \gamma y + 2z)$$

wirbelfrei wird. Das so erhaltene Feld besitzt ein Potential f. Bestimme f durch Integration von $\mathbf{0}$ aus.

7. Betrachte in der punktierten (x, y)-Ebene das Feld

$$\mathbf{K}(x, y) := \left(\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \right).$$

Siehe nächstes Blatt!

a) Verifiziere: $\operatorname{rot}\mathbf{K} \equiv 0$.

b) Berechne das Umlaufintegral $\int_\gamma \mathbf{K} \cdot d\mathbf{z}$ für einen Kreis γ vom Radius $r > 0$ um $\mathbf{0}$.

c) Zeige: $\mathbf{K}$ ist konservativ. *Hinweis:* Ein Potential lässt sich explizit angeben.

—

Abgabe: Wird nicht mehr abgegeben. Lösung ab Anfang August auf der Homepage verfügbar.