Serie 11

1. Bestimme alle C^1-Vektorfelder $\mathbf{K}$ in der punktierten Ebene $\dot{\mathbb{R}}^2 \equiv \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, die jede der folgenden Eigenschaften besitzen:

(1) $\mathbf{K}(\mathbf{z}) \perp \mathbf{z}$ für alle $\mathbf{z} \in \dot{\mathbb{R}}^2$,

(2) $|\mathbf{K}(\mathbf{z})|$ hängt nur von $|\mathbf{z}|$ ab,

(3) $\operatorname{rot} \mathbf{K}(\mathbf{z}) \equiv 0$.

2. Ein zwischen den beiden unendlich ausgedehnten "Platten" $z = \pm h$ definiertes Vektorfeld $\mathbf{K}(x, y, z)$ besitze eine Taylor-Entwicklung bezüglich z der Form

$$\mathbf{K}(x, y, z) = \mathbf{K}_0(x, y) + z\,\mathbf{K}_1(x, y) + \text{höhere Terme};$$

dabei ist

$$\mathbf{K}_0(x, y) := (x^2 - y^2, 2xy, x^2 + y^2), \qquad \mathbf{K}_1(x, y) := (-y, x, x + y).$$

Berechne $\mathbf{R}_0(x, y) := \mathbf{rot}\,\mathbf{K}(x, y, 0)$.

3. Berechne die folgenden Integrale zuerst als Linienintegrale, dann mit Hilfe der Greenschen Formel:

a) $\displaystyle\int_{\partial B} (xy\,dx + x^2\,dy), \qquad B := \big\{(x, y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^{2/3}\big\};$

b) $\displaystyle\int_{\partial B} (y\,dx + \sin x\,dy), \qquad B := \Big\{(x, y) \mid -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2},\ -1 \le y \le \cos x\Big\}.$

4. In der (x, y)-Ebene wird das Vektorfeld

$$\mathbf{K}(x, y) := (3x^2 - 4xy + 4y^2, -2x^2 + 8xy + 12y^2)$$

betrachtet. Man berechne auf irgendeine Weise das Integral $\int_\gamma \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x}$ für den in der Abbildung 1 eingezeichneten Weg γ.

Bitte wenden!

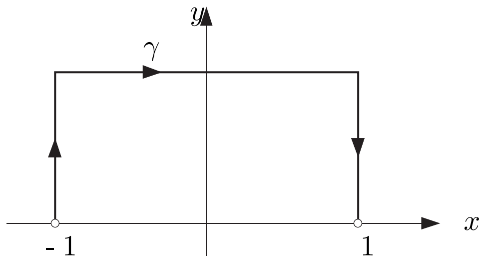

Abbildung 1: Der Weg γ aus Aufgabe 4.

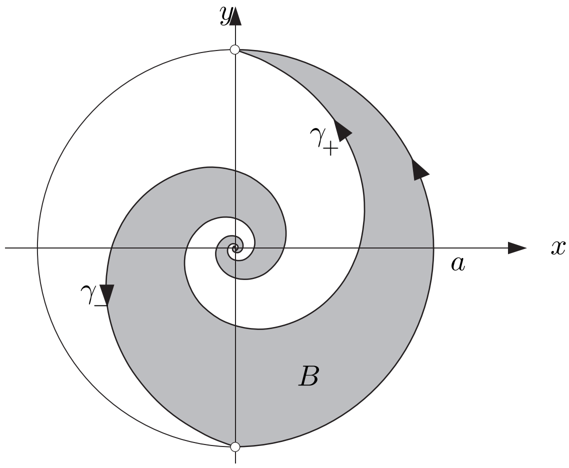

Abbildung 2: Der Bereich B aus Aufgabe 5.

5. Der Bereich B in der Abbildung 2 wird begrenzt durch den Kreis vom Radius a mit Zentrum im Ursprung und durch die beiden logarithmischen Spiralen

$$\gamma_\pm : \quad t \mapsto \begin{cases} x(t) := ae^{qt}\cos(t \pm \frac{\pi}{2}) \\ y(t) := ae^{qt}\sin(t \pm \frac{\pi}{2}) \end{cases} \qquad (-\infty \leq t \leq 0); \quad q > 0.$$

Berechne das Integral $\int_B y\, d\mu(x,y)$.

6. Verifiziere, dass die sinngemäss interpretierte Formel

$$N(\gamma, c) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z-c}$$

tatsächlich die Umlaufzahl (siehe Formel 14.4.(6) im Skript) des Zyklus γ um den Punkt $c \in \mathbb{C}$ herum liefert.
Hinweis: Zerlege in Real- und Imaginärteil und beachte $dz = dx + idy$.

Abgabe: Montag, 28.6.2004, in den Übungen oder den Kästen vor dem HG G 33.1.