Serie 10

1. Berechne die Oberfläche $\omega(S^3)$ der dreidimensionalen Einheitssphäre $S^3 \subset \mathbb{R}^4$

a) mit Hilfe einer Parameterdarstellung von S^3,

b) durch Betrachtung der Volumina von Kugelrinden und Grenzübergang, d. h. für $\varepsilon > 0$ betrachte

$$S^3_\varepsilon := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid 1 \leq |\mathbf{x}| \leq 1 + \varepsilon \right\}$$

und zeige

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{\mu(S^3_\varepsilon)}{\varepsilon} = \omega(S^3).$$

2. Produziere ein Vektorfeld $\mathbf{v}(x, y) := (P(x, y), Q(x, y))$ mit den folgenden Eigenschaften:

(1) Die Kreise, die die y-Achse im Ursprung berühren, sind Feldlinien.

(2) Das Feld ist in der ganzen Ebene definiert und stetig differenzierbar.

3. Produziere ein auf ganz $\mathbb{R}^3$ definiertes Vektorfeld $\mathbf{v}$, das die Schraubenlinien

$$\gamma_{r,h}: \quad t \mapsto (r \cos t, r \sin t, t - h) \qquad (r \geq 0,\ h \in \mathbb{R})$$

als Feldlinien besitzt.

4. Produziere eine geschlossene, glatte (d. h. reguläre C^1-) Kurve

$$\gamma: \quad t \mapsto \big(x(t), y(t)\big) \qquad (a \leq t \leq b),$$

die – als Kette aufgefasst – gleich 0 ist.

5. Berechne das Linienintegral

$$\int_\gamma \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x}$$

für

Bitte wenden!

a) $\mathbf{K}(x,y) := (x^2 + y, 2xy)$,
$\gamma :=$ Einheitskreis, positiver Umlaufsinn;

b) $\mathbf{K}(x,y) := (x + y, 2x - y)$,
$\gamma :=$ Bogen der kubischen Parabel $y = x^3$ von $(-2, -8)$ bis $(1, 1)$;

c) $\mathbf{K}(x,y,z) := (-y, x, z)$,
$\gamma :=$ Schnittkurve des Paraboloids $z = 1 - x^2 - y^2$ mit der Ebene $x + y + 2z = 2$, positiver Umlaufsinn um die z-Achse.

Abgabe: Montag, 21.6.2004, in den Übungen oder den Kästen vor dem HG G 33.1.