Serie 9

1. In der nachstehenden Formel bezeichnen (r, φ) Polarkoordinaten. Was hat man an den offen gelassenen Stellen einzusetzen?

$$\int_0^2 \int_0^x f\big(\sqrt{x^2 + y^2}\big)\, dy\, dx = \int_?^? \int_?^? ?\, dr\, d\varphi\ .$$

2. Man zeige, dass eine homogene Vollkugelrinde auf einen in ihrem Innern gelegenen Massenpunkt keine Gravitationskraft ausübt.
Hinweis: Wähle den Massenpunkt auf der z-Achse und verwende Kugelkoordinaten.

3. Bestimme das Volumen des Bereichs

$$B := \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq 1\big\}\,.$$

4. Ein Kreis vom Radius a rollt auf der Innenseite eines Kreises vom Radius $3a$.

a) Bestimme die Bahn eines Punktes P, der auf der Peripherie des inneren Kreises liegt und mit diesem Kreis fest verbunden ist.

b) Die Bahnkurve besitzt charakteristische Spitzen. Bestimme dort die Tangentenrichtungen.

c) Bestimme die zu einem vollen Umlauf des kleinen Kreises gehörige Länge der Bahnkurve.

5. Welchen Flächeninhalt hat der Bereich $x^2 + y^2 \leq 1$ auf der Sattelfläche $z = xy$?

6. Für welche Werte des Parameters $\lambda > 0$ besitzt die Spirale γ mit der Polardarstellung

$$\gamma : \qquad r(\varphi) := 1/\varphi^\lambda \qquad (\pi \leq \varphi < \infty)$$

endliche Länge? Berechne diese Länge insbesondere für $\lambda = 2$.

—

Abgabe: Montag, 14.6.2004, in den Übungen oder den Kästen vor dem HG G 33.1.