Serie 8

1. Es sei $\mathbf{x} : \mathbb{N} \to \mathbb{X}$ eine konvergente Punktfolge. Dann ist $\mathbf{x}(\mathbb{N})$ eine Nullmenge.

2. Entfernt man aus dem Intervall $[0,1]$ das offene mittlere Drittel, aus jedem der verbliebenen Teilintervalle wieder das offene mittlere Drittel und so fort *ad infinitum*, so bleibt am Schluss die berühmte **Cantor-Menge** C übrig. Zeige: C ist eine Jordansche Nullmenge.

3. Bei den folgenden Integralen ist die Reihenfolge umzukehren: Die innerste Variable soll zur äussersten werden. Wie lautet jeweils das neue Integral? Figuren!

a) $\displaystyle\int_{-1}^{2}\int_{-x}^{2-x^2} f(x,y)\,dy\,dx,$

b) $\displaystyle\int_{0}^{2}\int_{y^3}^{4\sqrt{2y}} f(x,y)\,dx\,dy,$

c) $\displaystyle\int_{-4}^{4}\int_{-\sqrt{4-|z|}}^{\sqrt{4-|z|}}\int_{-\sqrt{4-y^2-|z|}}^{\sqrt{4-y^2-|z|}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$

4. Durch das Zentrum einer Kugel wurde ein zylindrisches Loch der Länge a gebohrt. Berechne das Volumen des Restkörpers.

5. Der Bereich $B \subset \mathbb{R}^4$ ist gegeben durch die Ungleichungen

$$x_1^2 + x_2^2 \le x_3^2 + x_4^2 \le 1\ .$$

Berechne $\mu(B)$.

6. **a)** Das sogenannte **n-dimensionale Standardsimplex** ist die Menge

$$S_n := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_i \ge 0\ (1 \le i \le n),\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n \le 1\}\ .$$

Berechne die Zahlen $\alpha_n := \mu(S_n)$.
Hinweis: Durch geeignete Anwendung des Reduktionssatzes erhält man eine Rekursionsformel für die α_n.

Bitte wenden!

b) Berechne auch die Grössen

$$\beta_n := \int_{S_n} e^{x_1+x_2+\ldots+x_n}\, d\mu(\mathbf{x}) \; .$$

—

Abgabe: Montag, 8.6.2004, in den Übungen oder den Kästen vor dem HG G 33.1.