Serie 7

1. Es sei $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ ein gegebener Vektor $\neq \mathbf{0}$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(\mathbf{x}) := \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}}{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} + 1} \ .$$

a) Beweise, dass f auf $\mathbb{R}^n$ ein globales Maximum und ein globales Minimum annimmt.

b) Berechne die globalen Extremalwerte von f.

2. Es seien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reelle nichtnegative Zahlen mit $\sum_i x_i = na$. Dann gilt

$$\sum_{i<k} x_i x_k \leq \frac{n(n-1)}{2} a^2 \ .$$

3. Stelle eine anschauliche Skizze der Menge

$$C := \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 5,\ yz + zx + xy = 8\big\}$$

her und diskutiere die bezüglich C bedingt stationären Punkte der Funktion $f(x,y,z) := xyz$.

4. Angenommen, Sie müssten an dem folgenden Spiel teilnehmen: Sie geben eine reelle Zahl x bekannt; hierauf wählt Ihr Gegner eine reelle Zahl y und gewinnt von Ihnen den Betrag

$$f(x,y) := (x^2-4)y^2 + 2(x+4)y.$$

Welches x würden Sie wählen, und welches y hierauf Ihr Gegner?

5. Bestimme die globalen Extrema der Funktion

$$f(x,y) := x^2 - xy + y^2$$

auf dem Bereich K der Abbildung 1 sowie die Punkte, in denen diese Extremalwerte angenommen werden.

Bitte wenden!

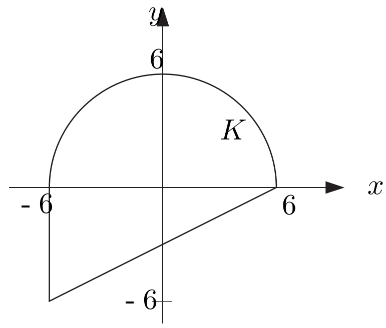

Abbildung 1: Bereich $K \subset \mathbb{R}^2$.

6. **a)** Es sei S eine (offene) d-Fläche im $\mathbb{R}^n$, und es sei $\mathbf{a} \notin S$ ein fester Punkt. Beweise den folgenden (intuitiv einleuchtenden) Sachverhalt: Ist die Distanzfunktion

$$d_{\mathbf{a}} : \mathbf{x} \mapsto |\mathbf{x} - \mathbf{a}|$$

im Punkt $\mathbf{p} \in S$ bedingt lokal extremal bezüglich S, so steht die Strecke von $\mathbf{a}$ nach $\mathbf{p}$ senkrecht auf der Tangentialebene $\mathsf{T}_{\mathbf{p}}S$.
Hinweis: Betrachte die Funktion $g(\mathbf{x}) := |\mathbf{x} - \mathbf{a}|^2$.

b) Bestimme den Durchmesser

$$\operatorname{diam}(B) = \sup_{\mathbf{x},\mathbf{y} \in B} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$$

des in Abbildung 2 dargestellten herzförmigen Bereichs B in der (x, y)-Ebene.
Hinweis: Hierfür wird nur ganz wenig Rechnung benötigt.

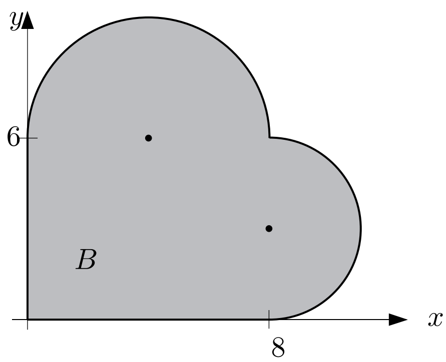

Abbildung 2: Bereich $B \subset \mathbb{R}^2$.

—

Abgabe: Montag, 24.5.2004, in den Übungen oder den Kästen vor dem HG G 33.1.