Serie 6

1. Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \left(x^2+y^2\right)\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & ((x,y) \neq \mathbf{0}) \\ 0 & ((x,y) = \mathbf{0}) \end{cases} .$$

a) Zeige: Die Funktion f ist in der ganzen Ebene differenzierbar.

b) Besitzt f überall stetige partielle Ableitungen?

2. Finde und beweise eine koordinatenfreie Identität der Form

$$\nabla(f \cdot g) = \ldots$$

3. Betrachte eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \curvearrowright \mathbb{R}$, einen Punkt $\mathbf{p} \in \mathrm{dom}\,(f)$ sowie einen beliebigen Einheitsvektor $\mathbf{e} \in \mathsf{T}_{\mathbf{p}}$. Ist $f(\mathbf{p}+t\mathbf{e})$ für alle hinreichend kleinen $t > 0$ definiert und existiert der Grenzwert

$$\lim_{t \to 0+} \frac{f(\mathbf{p}+t\mathbf{e}) - f(\mathbf{p})}{t} =: D_{\mathbf{e}} f(\mathbf{p}),$$

so heisst $D_{\mathbf{e}} f(\mathbf{p})$ die **Richtungsableitung** von f im Punkt $\mathbf{p}$ in Richtung $\mathbf{e}$.

a) Ist f an der Stelle $\mathbf{p}$ differenzierbar, so gilt $D_{\mathbf{e}} f(\mathbf{p}) = \nabla f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{e}$ und insbesondere $D_{\mathbf{e}_k} f(\mathbf{p}) = \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{p})$.

b) Die Richtungableitung der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \curvearrowright \mathbb{R}$ im Punkt $\mathbf{p}$ betrage 3 in nördlicher Richtung und $1/\sqrt{2}$ in südwestlicher Richtung. Bestimme $\nabla f(\mathbf{p})$.

c) Die Funktion $f(\mathbf{x}) := |\mathbf{x}|$ ist im Ursprung nicht differenzierbar, besitzt aber dort alle Richtungsableitungen.

4. Untersuche, ob die folgenden Funktionen im Ursprung ein lokales Extremum besitzen:

a) $f(x,y) := \cos(3x-2y) - \cos(5x+y)$,

Bitte wenden!

b) $g(x, y) := x^4 - 3x^3y^2 + 2x^2y^2 - 3x^2y^3 + y^4$,

c) $h(x, y) := \sin(x^2 + y^2 + z^2) + 2(\cos x + \cos y + \cos z)$.

Hinweis: Umständliche Rechnungen nach Möglichkeit vermeiden!

5. Verifiziere: Die Gleichung

$$2x^2 - 4xy + y^2 - 3x + 4y = 0$$

definiert implizit eine Funktion $y = g(x)$ mit $g(1) = 1$. Berechne den Wert $g'(1)$

a) mit Hilfe einer expliziten Darstellung von g und

b) mit Hilfe der Formel für die Ableitung einer implizit gegebenen Funktion.

Bestimme auch das maximale Intervall, auf dem g stetig differenzierbar ist.

6. Man gebe eine Parameterdarstellung einer Fläche vom Typ des Möbiusbandes (siehe Abb. 1) an. Das Band muss sich nicht verzerrungsfrei aus Papier herstellen lassen; es darf aber keine Knicke und Selbstdurchdringungen aufweisen.

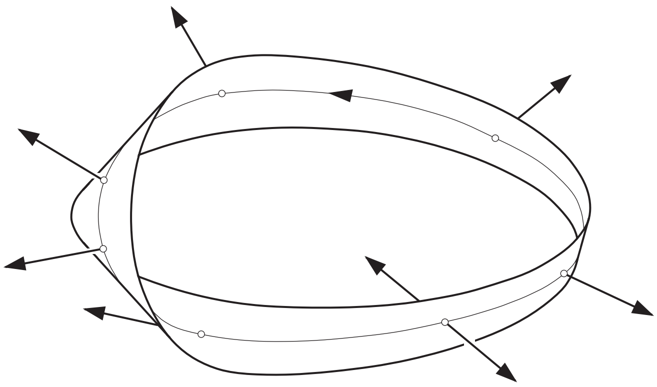

Abbildung 1: Ein Möbiusband.

Abgabe: Montag, 17.5.2004, in den Übungen oder den Kästen vor dem HG G 33.1.