

Serie 5

1. Ist die Funktion $f(t) := \sum_{k=1}^{\infty} \sin^2(t/k)$ differenzierbar?
2. Die Folge der stetigen Funktionen $f_n : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiere mit $n \rightarrow \infty$ gleichmässig gegen 0; überdies gelte

$$0 \leq f_n(t) \leq e^{-t} \quad \forall t \geq 0, \forall n.$$

Zeige: Unter diesen Umständen ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} f_n(t) dt = 0.$$

3. Berechne den Konvergenzradius und die Summe der folgenden Reihen:

a) $\sum_{k=0}^{\infty} k^2 t^k,$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{2k-1}.$

4. Durch geeignete Wahl von t in der Reihe für

$$\log \frac{1+t}{1-t}$$

berechne man $\log 2$ auf drei Stellen nach dem Komma genau. Hierzu wird eine Fehlerabschätzung benötigt: Man majorisiere die vernachlässigten Glieder durch eine geometrische Reihe.

5. Berechne die Zahl

$$s := \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots$$

Hinweis: Betrachte die Funktion

$$s(t) := \frac{t^2}{1 \cdot 2} + \frac{t^4}{3 \cdot 4} + \frac{t^6}{5 \cdot 6} + \dots$$

und finde durch geeignete Manipulationen einen einfachen Ausdruck für $s(t)$. Nach dem Satz von Abel ist $s = s(1)$.

Bitte wenden!

6. Gegeben sei die lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit der Matrix

$$[L] := \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Berechne die Norm

$$\|L\| = \sup_{|\mathbf{x}|=1} |L\mathbf{x}|.$$

Hinweis: Bestimme $\max |L\mathbf{x}|^2$ auf der Menge der Einheitsvektoren $\mathbf{x} = (\sin \varphi, \cos \varphi)$.

—

Abgabe: Montag, 10.5.2004, in den Übungen oder den Kästen vor dem HG G 33.1.