Serie 4

1. Bestimme die Orthogonaltrajektorien der Kurvenschar

$$\Gamma : \qquad y^2 - x = c \quad (c \in \mathbb{R}).$$

Hinweis: Berechne erst die Steigung $f(x, y)$ der Scharkurve durch einen gegebenen Punkt (x, y).

2. Die komplexwertige Funktion $z(\cdot)$ der rellen Variablen t ("Zeit") ist Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{z} = iz^2, \qquad z(0) = 1.$$

a) Bestimme $z(\cdot)$.

b) Zeichne die Kurve $\gamma : t \mapsto z(t)$ für $-\infty < t < \infty$ in der komplexen Ebene und beschreibe sie in Worten.

3. Bestimme die durch den Ursprung gehende Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \cos(x + y) + \sin(x - y).$$

Hinweis: Die Differentialgleichung ist separierbar.

4. Es bezeichne $y(\cdot|\eta)$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{y} = 6y + y^2 - y^3, \qquad y(0) = \eta.$$

Bestimme die Funktion $g(\eta) := \lim_{t\to\infty} y(t|\eta)$. Die Funktionen $y(\cdot|\eta)$ selber sind an sich nicht verlangt.

5. **a)** Auf welchem maximalen Intervall I ist die Reihe

$$f(t) := \sum_{k=1}^{\infty} k \exp\left(k(t^2 - t)\right)$$

lokal gleichmässig konvergent?

Bitte wenden!

b) Man stelle die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ in geschlossener Form, d. h. Σ-frei, dar.

6. Eine Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 0}$ ist rekursiv wie folgt definiert:

$$f_0(t) := \sin t, \qquad f_{n+1}(t) := \frac{2}{3} f_n(t) + 1.$$

a) Zeige: Die f_n konvergieren auf $\mathbb{R}$ gleichmässig gegen die Konstante 3.
Hinweis: Betrachte zuerst die Transformation

$$T : \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \frac{2}{3} x + 1.$$

b) Was lässt sich sagen, wenn die Startfunktion $f_0(t) := t^2$ derselben Iteration unterworfen wird?

—

Abgabe: Montag, 3.5.2004, in den Übungen oder den Kästen vor dem HG G 33.1.