Serie 1

1. Berechne einen Näherungswert für das Integral

$$\int_0^2 e^{-t^2/2}\,dt$$

mit Hilfe einer Zerlegung des Intervalls $[0,2]$ in 20 gleiche Teile. Schätze den Fehler ab und vergleiche mit dem Tabellenwert 1.19628801...

2. Es sei

$$f(t) := \begin{cases} \dfrac{1}{t} - \left\lfloor \dfrac{1}{t} \right\rfloor & (0 < t \leq 1) \\ 0 & (t = 0) \end{cases} .$$

Hierbei bedeutet $\lfloor \cdot \rfloor$ die Abrundung auf die nächstkleinere ganze Zahl. Zeige, dass $f(t)$ über $[0,1]$ integrierbar ist und drücke den Wert des Integrals mit Hilfe der **Euler-Mascheroni-Konstanten**, die definiert ist durch

$$C := \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n\right),$$

aus. (Bemerkung: In Tabellen findet man $C = 0.5772...$)

3. Beweise ohne Rückgriff auf den Hauptsatz der Infinitesimalrechnung die Gleichung

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan x \qquad (x > 0).$$

Hinweis: Setze $\alpha := \arctan x$ und betrachte Teilungen

$$T_n : \qquad t_k := \tan(k\alpha/n) \qquad (0 \leq k \leq n).$$

Bei geeigneter Wahl der Messpunkte lassen sich die Zahlen

$$R_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{t_k - t_{k-1}}{1 + t_k t_{k-1}}$$

als Riemannsche Summen zu dem angeschriebenen Integral auffassen.

Bitte wenden!

4. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige 2π-periodische Funktion. Unter welcher Bedingung besitzt f eine ebenfalls 2π-periodische Stammfunktion F? Man zeige, dass die gefundene Bedingung notwendig und hinreichend ist.

5. Zeige: Die Funktion

$$f(x) := \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt \qquad (x \in \mathbb{R})$$

nimmt auf $\mathbb{R}$ ein globales Maximum M und ein globales Minimum $-M$ an. Finde einen Ausdruck für M und beweise $M < 2$.
Hinweis: Beweise und verwende die Ungleichung $\sin t < t\cos(t/2)$ für $0 < t < \pi$.

6. (Eine Aufgabe aus dem Vordiplom Herbst 2003) Berechne den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} \right).$$

—

Abgabe: Mittwoch, 14.4.2004, in den Übungen oder den Kästen vor dem HG G 33.1.

—

Allgemeine Informationen

Testatbedingung: 9 sinnvoll bearbeitete Serien.

Präsenz: Dienstag 12–13 im HG E 18.1.

Übungen: Beginn ist am Montag, 4.4.2004. Die Übungen finden jeweils Montag 13–15 und Mittwoch 15–16 bzw. Montag 15–16 (Gruppe von Beatrice Roost) statt. Für die Einteilungen der Übungsgruppen siehe nächstes Blatt.

Siehe nächstes Blatt!

Name	Assistent/in	Raum	Zeit	Raum	Zeit
A–Bia	Semen Malamud	ML J 34.3	Mo 13–15	ML J 34.3	Mi 15–16
Ble–Cle	Dr. Lorenzo Tomassini	NO C 2	Mo 13–15	HG D 3.1	Mi 15–16
Col–Fen	Thomas Huber	HG D 5.1	Mo 13–15	HG D 5.1	Mi 15–16
Fer–Has	Khalid Harrar	HG D 5.3	Mo 13–15	HG D 5.3	Mi 15–16
Hee–Kes	Reto Müller	IFW A 32.1	Mo 13–15	HG E 1.2	Mi 15–16
Khi–Mey	Sara Grundel	HG F 7	Mo 13–15	HG E 3	Mi 15–16
Mic–Pia	Fabrizio Bernasconi	LFW C 1	Mo 13–15	HG E 33.1	Mi 15–16
Pil–Sche	Stefano Lecchini	HG E 1.1	Mo 13–15	HG E 33.3	Mi 15–16
Schi–Sta	Peter Elbau	ML H 34.3	Mo 13–15	HG E 5	Mi 15–16
Ste–Tsch	Beatrice Roost	HG E 5	Mo 13–15	HG F 26.3	Mo 15–16
Ueh–Z	Enno Lenzmann	HG D 3.2	Mo 13–15	HG G 26.3	Mi 15–16

Hinweis: Studierende, deren Nachname nicht von dieser Gruppeneinteilung erfasst wird, mögen sich bitte in eine der beiden jeweils nächstgelegenen Gruppen einteilen.

Internet: `www.math.ethz.ch/undergraduate/lectures/ss2004/math/analysis2`