Serie 13

1. **a)** Es sei

$$\Gamma : \quad x^2 + (y-c)^2 = c^2 \quad (c \in \mathbb{R})$$

die Schar der Kreise, die die x-Achse im Ursprung berühren. Leite durch elementargeometrische Betrachtungen die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ dieser Schar her.

b) Eine **Orthogonaltrajektorie** der Schar Γ ist eine Kurve σ, die in jedem ihrer Punkte die Scharkurve γ durch den betreffenden Punkt senkrecht schneidet. Wie lautet die Differentialgleichung der Orthogonaltrajektorien?

c) Zeichne einige Kreise der Schar Γ sowie einige Orthogonaltrajektorien. Die Figur bringt einen auf eine plausible Vermutung betreffend die Orthogonalschar $\Gamma^{\perp}$. Beweise diese Vermutung elementargeometrisch.

d) Verifiziere, dass die in **c)** geometrisch ermittelten Orthogonaltrajektorien in der Tat Lösungen der in **b)** gefundenen Differentialgleichung sind.

2. Es sei $s > 0$ gegeben. Man bestimme die Differentialgleichung der Kurven $\gamma : y = y(x)$ im ersten Quadranten, die die Eigenschaften **a)** bzw. **b)** bzw. **c)** besitzen.

a) Die Tangentenabschnitte zwischen Berührungspunkt und x-Achse haben alle dieselbe Länge s.

b) Die Tangentenabschnitte zwischen den beiden Koordinatenachsen haben alle dieselbe Länge s.

c) Die Dreiecke, begrenzt durch Tangente, Ordinate im Berührungspunkt und x-Achse, haben alle denselben Flächeninhalt s^2.

3. **a)** Zeichne das Richtungsfeld der Differentialgleichung

$$y' = \min\{y, 1\}.$$

b) Bestimme explizit die beiden Lösungen $y_1(x), y_2(x)$ mit den Anfangspunkten

$$P_1 := (0, -1), \qquad P_2 := (0, 1/e).$$

Bitte wenden!

4. Bestimme eine möglichst einfache lineare homogene Differentialgleichung mit konstanten reellen Koeffizienten, welche die Funktion

$$f(x) := xe^{-2x}\cos x$$

als eine Lösung hat.

5. Gesucht sind die sämtlichen für $t \to \infty$ exponentiell gedämpften Lösungen der Differentialgleichung $y''' + iy = 0$. (i : imaginäre Einheit)

6. Ein ungedämpfter harmonischer Oszillator befindet sich zunächst in Ruhestellung. In einem gewissen Moment wird eine auslenkende Kraft eingeschaltet, die mit der Zeit exponentiell nachlässt. Es geht also um das Anfangswertproblem

$$y''(t) + \omega^2 y(t) = e^{-\delta t}, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

mit Konstanten $\omega, \delta > 0$. Langfristig, das heisst: nach dem Einschwingungsvorgang, verbleibt eine harmonische Schwingung. Berechne deren (reelle) Amplitude.

7. Versuche über einen naheliegenden Ansatz eine Lösung der folgenden inhomogenen Eulerschen Differentialgleichung

$$y'' - \frac{4}{r}y' + \frac{6}{r^2}y = r^5 \qquad (0 < r < \infty)$$

für die Funktion $y = y(r)$ zu finden.

8. Betrachte die lineare, homogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

Zeige: Die n Lösungen $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ sind genau dann linear unabhängig, wenn die sog. **Wronski-Determinante**

$$W(t) := \det \begin{bmatrix} y_1(t) & \cdots & y_n(t) \\ y_1'(t) & \cdots & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}$$

für irgendein $t_0 \in \mathbb{R}$ nicht verschwindet, d. h., $W(t_0) \neq 0$.
Hinweis: Benutze u. a. die eindeutige Existenz der Lösung $y = y(t)$ mit vorgegebenen Anfangswerten $y(t_0) = \eta_0, \ldots, y^{(n-1)}(t_0) = \eta_{n-1}$.

—

Abgabe: Diese Serie wird nicht mehr abgegeben.

Ferienpräsenz: Im HG E 18.1 findet an folgenden Termine eine Ferienpräsenz statt:
9.2. (11h-13h), 16.2. (11h-13h), 20.2. (12h-14h), 27.2. (12h-14h).