Serie 12

1. Aus dem Additionstheorem für den Tangens folgt relativ leicht die Formel

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}.$$

Man benütze diese Formel und die Taylor-Entwicklung des Arcustangens, um $\pi/4$ mit einem Fehler von höchstens 10^{-4} zu berechnen.

2. Jemand möchte $\sinh 1$ auf hundert Dezimalstellen genau berechnen. Wieviele Glieder der Taylor-Entwicklung $j_0^\infty \sinh$ muss sie berücksichtigen?

3. Die Funktion $f : \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{R}$ sei in einer Umgebung von 0 beliebig oft differenzierbar. Wann lässt sich auf Grund der Werte $a_k := f^{(k)}(0)$ mit $k \in \mathbb{N}$ entscheiden, ob f in 0 ein lokales Maximum, ein Minimum oder kein lokales Extremum besitzt?

4. Konstruiere eine C^∞-Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to [0,1]$, die den folgenden Bedingungen genügt:

$$\varphi(t) \equiv 1 \quad (|t| \leq 1), \qquad \varphi(t) \equiv 0 \quad (|t| \geq 2).$$

5. Die Gleichung $z^2 - 3z + 27 = 0$ besitzt eine Lösung in der Nähe von $z_0 := 1 + 5i$. Man führe zwei Newtonschritte durch zur Bestimmung eines besseren Näherungswerts z_2.

6. Ausgehend vom Näherungswert $x_0 := 1$ bestimme man mit Hilfe des Newtonschen Verfahrens die Nullstelle der Funktion $f(x) := x^2$. Man berechne explizit den n-ten Nährungswert x_n. Wie gut ist die Konvergenz, und warum ist sie nicht besser?

—

Abgabe: Montag, 2.2.2004, in den Übungen oder den Kästen vor dem HG G 33.1.