

Serie 11

1. Betrachte die Funktion

$$f(t) := \begin{cases} t + 2t^2 \sin(1/t) & (t \neq 0) \\ 0 & (t = 0) \end{cases}$$

und verifiziere, was folgt:

- | | |
|--|--|
| <p>a) f ist differenzierbar,</p> <p>b) f' ist auf $] - 1, 1[$ beschränkt,</p> | <p>c) $f'(0) = 1$,</p> <p>d) f ist auf keinem noch so kleinen Intervall $] - h, h[$, $h > 0$, monoton wachsend.</p> |
|--|--|

2. Berechne die folgenden Grenzwerte:

- | | |
|---|---|
| <p>a) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(\sqrt{1+t} - 1)}{t}$,</p> <p>b) $\lim_{t \rightarrow \pi/2} \frac{\sin t + \sin(3t)}{\cos(2t)}$,</p> <p>c) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{a^t - 1}{b^t - 1}$ ($a, b > 0$),</p> | <p>d) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos t}}{t}$,</p> <p>e) $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^\alpha - t^\beta}{t^{1/\beta} - t^{1/\alpha}}$ ($\alpha\beta(\alpha - \beta) \neq 0$),</p> <p>f) $\lim_{t \rightarrow 0} (1 + 2 \sin t)^{\cot t}$</p> |
|---|---|

Hinweis: Bei f) Logarithmieren.

3. Ein Versuch habe n mögliche Ergebnisse, die mit Wahrscheinlichkeiten $p_k > 0$ ($1 \leq k \leq n$) eintreten, wobei $\sum_{k=1}^n p_k = 1$ gilt. Ein natürliches Mass für die Ungewissheit über den Ausgang des Versuchs ist die sogenannte **Entropie**

$$H := - \sum_{k=1}^n p_k \log p_k .$$

Zeige: Die Entropie H ist am grössten, wenn alle Ergebnisse gleichwahrscheinlich sind, d. h. es gilt $p_k = p_l$ für $1 \leq k, l \leq n$.

Bitte wenden!

4. a) Zeige: Für $a, b, c \geq 0$ gilt stets die Ungleichung

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \leq \frac{a^3+b^3+c^3}{3}.$$

b) Formuliere und beweise eine möglichst allgemeine Ungleichung dieser Art.

—

Abgabe: Montag, 26.1.2004, in den Übungen oder den Kästen vor dem HG G 33.1.