Serie 10

1. Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$f_\alpha(t) := \begin{cases} t^\alpha \sin(1/t) & (t > 0) \\ 0 & (t = 0) \end{cases}$$

an der Stelle $t = 0$ bzw. im Intervall $[0,1]$: **a)** beschränkt, **b)** stetig, **c)** differenzierbar, **d)** stetig differenzierbar, **e)** von beschränkter Ableitung?

2. Ausgehend von der stetig differenzierbaren Funktion $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wird die Funktion

$$\varphi(x,y) := \begin{cases} \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} & (y \neq x) \\ f'(x) & (y = x) \end{cases}$$

gebildet. Zeige: Die Funktion φ ist auf $I \times I$ stetig.
Hinweis: Zeige, dass φ in jedem einzelnen Punkt (x_0, y_0) stetig ist. Dabei sind verschiedene Fälle zu unterscheiden.

3. Berechne die Ableitungen der folgenden Ausdrücke:

a) $\log \dfrac{1 + \sqrt{1 - t^2}}{t}$,

b) $\sqrt{\dfrac{\alpha + \beta t}{\alpha - \beta t}} \quad (\alpha, \beta > 0)$,

c) $t^{1/3}(1-t)^{2/3}(1+t)^{1/2}$,

d) t^t,

e) $(\log \tan t)^{-1/3}$.

Bestimme in jedem Fall den Definitionsbereich D sowie den Definitionsbereich D' der Ableitung.

4. Berechne die hundertste Ableitung der Funktion $f(t) := t^2 \sin(2t)$.

5. Die Funktion $f(t) := \sqrt{t}$ soll auf dem Intervall $[0,1]$ durch eine lineare Funktion $l(t) := t + c$ möglichst gut approximiert werden, das heisst so, dass

$$\max\{|f(t) - l(t)| \mid 0 \leq t \leq 1\}$$

minimal wird. Für welche Wahl von c ist das der Fall?
Hinweis: Diskutiere $f - l$ anstelle von $|f - l|$.

Bitte wenden!

6. Eine Zahl $a \geq 1$ soll in $n \geq 1$ gleiche Teile geteilt werden, so dass das Produkt der Teile möglichst gross wird. Bestimme n in Abhängigkeit von a.
Hinweis: Die Funktion $\varphi(t) := (a/t)^t$ ist unimodal, d. h. es gibt ein $T > 0$ so, dass $\varphi(t)$ streng monoton steigend auf $]0, T[$ sowie streng monoton fallend auf $]T, \infty[$ ist.

—

Abgabe: Montag, 19.1.2004, in den Übungen oder den Kästen vor dem HG G 33.1.