Serie 8

1. Untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-\sqrt{k}}{(k+\sqrt{k})^2}$,

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k + i^k}{(3i)^k - 2^k}$,

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$,

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k!}}$.

2. Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Reihen konvergent?

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{x}{k}\right)$,

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (1 - \cos\left(\frac{x}{k}\right))$,

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \tan\left(\frac{x}{k}\right)$,

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \binom{2k}{k} x^k$ (Quotientenkriterium).

3. Zeige: Konvergieren die a_k monoton fallend gegen 0 und ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent, so gilt

$$\lim_{k\to\infty} (k a_k) = 0.$$

Hinweis: $n a_{2n} \leq \sum_{k=n+1}^{2n} a_k$.

4. Es bezeichne β_n die Anzahl der Ziffern in der Binärdarstellung von n. Bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n z^n$.

5. Es seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ gegebene nichtnegative Zahlen. Bestimme den Konvergenzradius der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_1^k + \alpha_2^k + \ldots + \alpha_p^k)\, t^{2k}.$$

Bitte wenden!

6. Es seien α und β positive Zahlen. Wie gross ist der Konvergenzradius der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1+\alpha^k}{1+\beta^k}\, z^k \ ?$$

7. Mit Hilfe der **Fibonacci-Folge**

$$a_0 := 0, \quad a_1 := 1, \quad a_k := a_{k-1} + a_{k-2} \quad (k \geq 2)$$

wird folgende Potenzreihe gebildet:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = z + z^2 + 2z^3 + 3z^4 + 5z^5 + \ldots \qquad (*)$$

Zeige:

a) Die Reihe $(*)$ konvergiert mindestens für $|z| < 1/2$ und stellt dort eine Funktion $f(z)$ dar.

b) Es ist $f(z) = \dfrac{z}{1 - z - z^2}$. (*Hinweis:* Verifiziere $(1 - z - z^2)f(z) \equiv z$.)

c) Die Funktion f besitzt eine Zerlegung der Form

$$f(z) = \frac{A}{1 - \lambda z} + \frac{B}{1 - \mu z}$$

und lässt sich daher als Summe von zwei geometrischen Reihen schreiben. Dies liefert eine zweite Darstellung von f als Potenzreihe und damit einen geschlossenen Ausdruck für die k-te Fibonacci-Zahl a_k.

d) Bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihe $(*)$.

—

Bitte beachten!
Abgabe: Montag, 5.1.2004, in den Übungen oder den Kästen vor dem HG G 33.1.