Serie 7

1. Die Folge $a.$ sei rekursiv definiert durch

$$a_0 := 1, \quad a_{n+1} := \sqrt{2a_n} \qquad (n \geq 0).$$

Zeige, dass diese Folge konvergiert, und berechne ihren Grenzwert.

2. Zeige: Jede reelle Zahlenfolge besitzt eine monotone Teilfolge. *Hinweis:* Die Menge $A = \{n \mid \forall k > n : x_k \leq x_n\}$ für eine Folge $x.$ ist entweder endlich oder unendlich.

3. Es seien $A \subset \mathbb{X}$ eine kompakte Menge und $f : A \to \mathbb{R}$ eine **lokal beschränkte** Funktion, das heisst: Jeder Punkt $a \in A$ besitzt eine (unter Umständen sehr kleine) Umgebung $U(a)$, in der f beschränkt ist. Dann ist f (global) beschränkt auf A. Beweise dies

a) direkt (mit Hilfe des Satzes von Heine-Borel),

b) indirekt (mit Hilfe des Satzes **(4.12)** auf Seite 155 im Skript).

4. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.

a) Zeige, dass f ein globales Maximum oder ein globales Minimum annimmt.

b) Kann in **a)** das "oder" durch "und" ersetzt werden?

5. Ist die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf dem Intervall $I :=]0,1]$ gleichmässig stetig, so existiert $\lim_{x\to 0+} f(x)$. *Hinweis:* Cauchy-Kriterium.

6. Eine stetige Funktion $f : [a,b] \to [a,b]$ besitzt wenigstens einen **Fixpunkt**, das heisst: Es gibt einen Punkt $\xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) = \xi$. Figur!

Bitte wenden!

7. Es seien $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ zwei feste Vektoren mit $|\mathbf{b}| < 1$, und es sei die Vektorfolge $\mathbf{a}_\cdot$ rekursiv definiert durch

$$\mathbf{a}_0 := \mathbf{a}, \quad \mathbf{a}_{k+1} := \mathbf{b} \times \mathbf{a}_k \quad \text{(Vektorprodukt).}$$

Berechne

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{a}_k.$$

Hinweis: Benutze die geometrische Definition des Vektorprodukts. Figur!

8. Es sei

$$\varepsilon_k := \begin{cases} 1, & \text{wenn die Dezimaldarstellung von } k \text{ keine ‘ 9 ’ enthält,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige, dass die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{k}$ konvergiert.

Abgabe: Montag, 15.12.2003, in den Übungen oder den Kästen vor dem HG G 33.1.