Serie 6

1. Die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$f(x) := \inf\{|nx-1| \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Skizziere den Graphen von f (mindestens für $0.2 \leq x \leq 1$) und zeige:

a) f ist stetig in $]0,1]$,

b) $\lim_{x\to 0+} f(x) = 0$.

2. Bestimme die folgenden Grenzwerte, falls vorhanden:

a) $\displaystyle\lim_{x\to -3} \frac{x^3+27}{x^4-81}$,

b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^p-1}{x^q-1} \quad (p,q \in \mathbb{N}^*)$,

c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \sin(\sqrt{x})$,

d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \sin\left(\frac{2x-1}{(\sqrt{x}+1)^3}\right)$,

e) $\displaystyle\lim_{x\to 2+} \frac{x^2-14x+24}{|x-2|+|x^2-4|}$,

f) $\displaystyle\lim_{x\to 2-} \frac{x^2-14x+24}{|x-2|+|x^2-4|}$,

g) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x(x+a)}-x\right)$.

3. Zeige: Eine konvergente Folge ganzer Zahlen ist von einem n_0 an konstant.

4. Berechne die folgenden Grenzwerte:

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(3n-4)(n^2+1)}{7n(2n^2+10000)}$,

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$,

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left[n\left(1-\sqrt{1-a/n}\right)\right]$,

d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n$.

5. **a)** Es sei $x.$ eine Folge, und es seien die drei Teilfolgen $(x_{2k} \mid k \geq 0)$, $(x_{2k+1} \mid k \geq 0)$ und $(x_{5k} \mid k \geq 0)$ konvergent. Dann konvergiert auch die Folge $x.$.

b) Beweise oder widerlege: Ist die Teilfolge $(x_{pk} \mid k \geq 0)$ für jede Primzahl p konvergent, so konvergiert auch die Folge $x.$.

Bitte wenden!

6. Man konstruiere eine injektive Zahlenfolge $x.$, die genau die sämtlichen natürlichen Zahlen als Häufungspunkte besitzt. Es genügt, die Folge $x.$ so weit anzuschreiben, bis das Bildungsgesetz erkennbar wird; eine Formel für $x.$ wird nicht verlangt.

Abgabe: Montag, 8.12.2003, in den Übungen oder den Kästen vor dem HG G 33.1.