Serie 5

1. Es sei $c := a + ib$ eine gegebene komplexe Zahl wobei $a, b \in \mathbb{R}$. Bestimme die Real- und Imaginäranteile der beiden Quadratwurzeln von c. (Gemeint sind die beiden Lösungen der Gleichung $z^2 = c$ mit $z = x + iy$ und $x, y \in \mathbb{R}$.)

2. Durch $z \mapsto w := 1/z$ wird die *punktierte Ebene* $\dot{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ in die w-Ebene abgebildet. Man zeichne die Bilder

a) der reellen, punktierten Achse $\{z \in \dot{\mathbb{C}} \mid \operatorname{Im} z = 0\}$,

b) der imaginären, punktierten Achse $\{z \in \dot{\mathbb{C}} \mid \operatorname{Re} z = 0\}$,

c) eines Kreises $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$,

d) der Geraden $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = 1\}$.

3. Beweise: Das Dreieck Δ mit den Eckpunkten $0, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ besitzt den Flächeninhalt

$$\mu(\Delta) = \frac{1}{2} \left| \operatorname{Im}(z_1 \bar{z}_2) \right| .$$

4. Zeige: Die Seitenmitten eines räumlichen (nicht notwendigerweise ebenen) Vierecks $ABCD$ liegen in einer Ebene und bilden ein Parallelogramm.

5. Zeige: Ist $f : A \to \mathbb{X}$ im Punkt $x_0 \in A$ stetig, so ist f in einer geeigneten Umgebung von x_0 beschränkt.

6. **a)** Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig und genüge der Funktionalgleichung

$$f(x^2) = f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. — Zeige: f ist konstant.

b) Konstruiere eine nichtkonstante, stetige Funktion $f : [2, \infty[\to \mathbb{R}$, die derselben Funktionalgleichung genügt.

Bitte wenden!

7. Man finde eine stetige Funktion $f : \mathbb{Q} \to \{0, 1\}$ mit $f(0) = 0, f(1) = 1$. Kann eine solche Funktion f stetig fortgesetzt werden auf $\mathbb{R}$, d. h. existiert eine stetige Funktion $\bar{f} : \mathbb{R} \to \{0, 1\}$ mit $\bar{f}(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{Q}$?

—

Abgabe: Montag, 1.12.2003, in den Übungen oder den Kästen vor dem HG G 33.1.