Serie 4

1. Die Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien rekursiv definiert durch

$$f_0(x) := |x|, \quad f_{n+1}(x) := |1 - f_n(x)| \quad (n \geq 0).$$

Zeichne den Graphen von f_{100}.

2. Zeige: Die drei reellen Zahlen a, b, c sind genau dann alle positiv, wenn die folgenden Ungleichungen simultan erfüllt sind:

$$a + b + c > 0, \quad ab + bc + ca > 0, \quad abc > 0. \tag{$*$}$$

Hinweis: Sind die drei Ungleichungen $(*)$ erfüllt, so hat die Gleichung $x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x - abc = 0$ keine Lösung ≤ 0.

3. Bestimme Infimum und Supremum der folgenden Mengen. Welche dieser Mengen besitzen ein minimales oder ein maximales Element?

a) $\left\{ \dfrac{|x|}{1 + |x|} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\}$,

b) $\left\{ \dfrac{x}{1 + x} \;\middle|\; x > -1 \right\}$,

c) $\left\{ x + \dfrac{1}{x} \;\middle|\; \dfrac{1}{2} < x < 2 \right\}$,

d) $\{ x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R} : (x + 1)^2 + 5y^2 < 4 \}$.

4. Für ein gegebenes $\lambda \in \mathbb{R}$ wird eine Folge $a.$ rekursiv wie folgt definiert:

$$a_0 := 1, \quad a_1 := \lambda, \quad a_k := 2a_{k-1} - a_{k-2} \ (k \geq 2).$$

a) Finde eine explizite Formel für a_k.

b) Bestimme Infimum und Supremum der Menge $A := \{a_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ in Abhängigkeit von λ.

Bitte wenden!

5. Eine reelle Zahl ξ heisst *algebraisch*, wenn sie Lösung einer Gleichung

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0, \quad a_n \neq 0,$$

mit ganzzahligen Koeffizienten a_k $(0 \leq k \leq n)$ ist. — Zeige: Die Menge der algebraischen Zahlen ist abzählbar unendlich.

6. Konstruiere eine bijektive Abbildung der reellen Achse $\mathbb{R}$ auf

a) $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

b) eine Kreislinie.

—

Abgabe: Montag, 24.11.2003, in den Übungen oder den Kästen vor dem HG G 33.1.