

## Serie 3

1. Auf der Menge  $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  wird folgende Relation definiert:

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff \exists \lambda > 0 : (x_2, y_2) = (\lambda x_1, \lambda y_1).$$

- a) Zeige, dass  $\sim$  eine Äquivalenzrelation ist.  
b) Deute die Äquivalenzklassen  $[(x, y)]$  geometrisch.  
c) Zeige, dass die folgende Operation wohldefiniert ist:

$$[(x_1, y_1)] * [(x_2, y_2)] := [(x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)].$$

- d) Deute die Operation  $*$  geometrisch.

2. Auf wieviele verschiedene Arten lässt sich eine Menge von  $n = 1, 2, \dots, 5$  Elementen in Äquivalenzklassen aufteilen?

3. Zwei reelle Grössen  $x$  und  $y$  sind durch die Beziehung

$$\sqrt{1+x} + \sqrt{1+y} = 2$$

aneinander gekoppelt. Ist diese Beziehung monoton? Welche Intervalle der  $x$ - und der  $y$ -Achse werden dadurch aufeinander abgebildet? Figur!

4. Die Funktion

$$f : x \mapsto \sqrt{9 - \sqrt{25 - \sqrt{x}}}$$

wird als reellwertige Funktion der reellen Variablen  $x$  betrachtet.

- a) Bestimme den Definitionsbereich  $\text{dom}(f) =: D$  sowie die Wertemenge  $\text{im}(f) =: W$ .  
b) Überlege:  $f$  ist Zusammensetzung von streng monotonen Funktionen und damit injektiv.  
c) Bestimme den Funktionsterm der Umkehrfunktion  $f^{-1} : W \rightarrow D$ .

**Bitte wenden!**

5. Zeige mit vollständiger Induktion:

a) Durch  $n$  Geraden "in allgemeiner Lage" wird die Ebene in  $\frac{n^2+n+2}{2}$  Gebiete zerlegt. (*Hinweis:* Jede weitere Gerade zerlegt eine ganz bestimmte Anzahl der schon vorhandenen Gebiete in zwei Teile.)

b) 
$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad (q \neq 1).$$

c) Ist  $n \geq 2$  und  $0 < x_k < 1$  ( $1 \leq k \leq n$ ), so gilt

$$\prod_{k=1}^n (1 - x_k) > 1 - \sum_{k=1}^n x_k.$$

d) Die Summe aller weder durch 2 noch durch 5 teilbaren natürlichen Zahlen  $< 10n$  beträgt  $20n^2$ .

e) 
$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

f) 
$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

—

**Abgabe:** Montag, 17.11.2003, in den Übungen oder den Kästen vor dem HG G 33.1.