Serie 2

1. Stelle die folgenden Mengen in geeigneten Figuren anschaulich dar:

a) $\{t \in \mathbb{R} \mid 4 < t^2 \leq 16\}$,

b) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| + |z+1| = 8\}$,

c) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z=1\}$,

d) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{1-x} < 1 - \frac{x}{2}\right\}$,

e) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq |x| + |y| \leq 2\}$,

f) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x-y| + 2 \leq |x|\}$.

2. Zwei an sich unabhängige reelle Grössen x und y sind miteinander verknüpft durch die Einschränkung

$$x^2 + 6x \leq 8y - y^2. \qquad (*)$$

a) Man verschaffe sich eine Übersicht über die Gesamtheit der möglichen "Zustände" (x,y). Gemeint ist: Man zeichne eine Figur.

b) Welchen Wert kann die Grösse x unter der Bedingung $(*)$ höchstens annehmen, und wie müsste y gewählt werden, damit dieser Maximalwert von x tatsächlich realisiert werden kann?

3. Es sei A das Innere des Oktaeders mit den Ecken $(\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0), (0, 0, \pm 1)$. Man stelle A auf möglichst einfache Weise in der Form $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \ldots\}$ dar.

4. Es sei S die Menge aller natürlichen Zahlen ohne quadratischen Teiler, T die Menge aller natürlichen Zahlen mit genau drei Primfaktoren (1 ist keine Primzahl) und U die Menge aller natürlichen Zahlen ≤ 200. Bestimme $S \cap T \cap U$.

Bitte wenden!

5. Bestimme die Lösungsmenge $L \subset \mathbb{R}^2$ des folgenden Gleichungssystems:

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{x+1} + y &= 1 \\ 2x - \sqrt{24y+25} &= 5 \end{aligned}\right\} .$$

Hinweis: $\sqrt{c}$ ist nur für $c \geq 0$ definiert und bezeichnet die nichtnegative Lösung t der Gleichung $t^2 = c$.

6. Erfinde einen Test im Sinn 1.2.(1) (siehe Seite 11 im Skript), der die zweielementigen Mengen charakterisiert.

—

Abgabe: Montag, 10.11.2003, in den Übungen oder den Kästen vor dem HG G 33.1.